Morin

Polygones réguliers constructibles

<u>Thm</u> (Gauss - Wantzel) : Soit p premier impair. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
L'angle $\frac{2\pi}{p^\alpha}$ est constructible (i.e. $e^{\frac{2i\pi}{p^\alpha}}$ l'est, i.e. $\cos\left(\frac{2\pi}{p^\alpha}\right)$ l'est) ssi $\alpha = 1$ et $p = 1 + 2^{2^\beta}$.

$\boxed{\Rightarrow}$: Soit $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{q}\right)$ avec $q = p^\alpha$.
Par Wantzel, puisque $\cos\left(\frac{2\pi}{q}\right)$ constructible, $[\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{q}) : \mathbb{Q}] = 2^m$.
De plus, ϕ_q étant le polynôme minimal de ω, $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = \deg \phi_q = \varphi(q) = p^{\alpha-1}(p-1)$.
Puisque $\omega^2 - 2\omega\cos\frac{2\pi}{q} + 1 = 0$, $\cos\frac{2\pi}{q} \in \mathbb{Q}(\omega)$ et $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{q})] = 2$.
Donc, par multiplicativité, $p^{\alpha-1}(p-1) = 2^{m+1}$

- Puisque p premier, $\alpha = 1$ (sinon $p \mid 2^{m+1}$, mais p impair).
- $p = 1 + 2^{m+1}$. Ecrivons $m+1 = \lambda 2^\beta$, λ impair.

$X^\lambda + 1 = X^\lambda - (-1)^\lambda = (X+1)\sum_{k=0}^{\lambda-1}(-1)^k X^{\lambda-1-k}$ donc $X+1 \mid X^\lambda + 1$, donc $2^{2^\beta} + 1 \mid p$.
De là $\lambda = 1$, p est de Fermat.

$\boxed{\Leftarrow}$: Notons $n = 2^\beta$, $p = 1 + 2^n$, $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$.
On a toujours $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = p-1$.
Soit $G = \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\omega))$. Un élément $g \in G$ est entièrement déterminé par $g(\omega)$.

* $1 = g(\omega^p) = g(\omega)^p$ et $g(\omega) \neq 1$ car g injectif donc $g(\omega) \in \{\omega, \dots, \omega^{p-1}\}$

ou

* $0 = g(\phi_p(\omega)) = \phi_p(g(\omega))$ donc $g(\omega) \in \{\omega, \dots, \omega^{p-1}\}$.

Ainsi, $G = \{g_k : \omega \mapsto \omega^k,\ k \in \{1, \dots, p-1\}\} \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$
Soit g générateur de G. Posons $K_i = \{x \in \mathbb{Q}(\omega),\ g^{2^i}(x) = x\}$, sous-corps de $\mathbb{Q}(\omega)$.
Puisque $g^{2^{i+1}} = (g^{2^i})^2$, $K_i \subseteq K_{i+1}$.
Etant générateur, $(g^k(\omega))_{0 \leq k \leq p-2}$ est une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}(\omega)$

<u>Lem</u> : $K_0 = \mathbb{Q}$ et $\forall i$, $K_i \neq K_{i+1}$.

- Soit $z \in K_0$. $z = \sum_{k=0}^{p-2} \lambda_k g^k(\omega)$, $g(z) = \sum_{k=0}^{p-2} \lambda_k g^{k+1}(\omega) = \lambda_{p-2}\omega + \sum_{k=1}^{p-2} \lambda_{k-1} g^k(\omega)$.

Donc tous les scalaires λ_k sont égaux. $z = \lambda_0 \sum_{k=0}^{p-2} g^k(\omega) = \lambda_0 \sum_{j=1}^{p-1} \omega^j = -\lambda_0 \in \mathbb{Q}$
Donc $K_0 = \mathbb{Q}$.

- Posons $z = \sum_{k=0}^{2^{n-i}-1} g^{k2^i}(\omega)$. Montrons que $z \in K_i \setminus K_{i-1}$.

$\to$ $g^{2^{i-1}}(z) = \sum_{k=0}^{2^{n-i}-1} g^{k2^i + 2^{i-1}}(\omega) \neq z$ car écriture différente dans la base

$\to$ $g^{2^i}(z) = \sum_{k=0}^{2^{n-i}-1} g^{(k+1)2^i}(\omega) = \omega + \sum_{k=1}^{2^{n-i}-1} g^{k2^i}(\omega) = z$.

<u>Or</u> : $2^n = [\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = \prod_{i=0}^{n-1} [K_{i+1} : K_i] \geq 2^n$ donc $[K_{i+1} : K_i] = 2$, $\forall i$.
Par Wantzel, tout $x \in \mathbb{Q}(\omega)$ est constructible, donc $\cos\frac{2\pi}{p} \in \mathbb{Q}(\omega)$ est constructible